Correction de l'exercice 1

1. (**a**) Comme vu en cours, pour un mouvement circulaire uniforme de rayon R et de vitesse v : $ma_r = -\frac{mv^2}{(R_T+z)} = -\frac{\mathscr{G}mm_T}{(R_T+z)^2}$, soit $v = \sqrt{\mathscr{G}m_T/(R_T+z)}$.

(**b**) Sur cette orbite $v = 2\pi(R_T+z)/T$, soit $T = 2\pi(R_T+z)^{3/2}/\sqrt{\mathscr{G}m_T} = 5{,}7\cdot 10^3\,\mathrm{s} = 1{,}54\,\mathrm{h}$. Sur une orbite elliptique, on aura donc $T = 2\pi a^{3/2}/\sqrt{\mathscr{G}m_T}$.

(**c**) Comme vu en cours, les distances r_p au périgée et r_a à l'apogée où $\dot{r} = 0$, sont toutes deux solutions de l'équation en r :

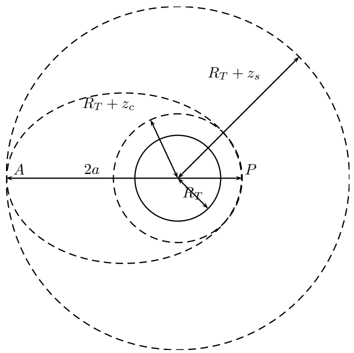
$$\mathscr{E}_\mathrm{m} = \frac{\sigma^2}{2mr^2} - \frac{\mathscr{G}m_T m_{sc}}{r}$$
$$\text{soit} 0 = r^2 - r\frac{\mathscr{G}m_T m_{sc}}{\mathscr{E}_\mathrm{m}} + \frac{\sigma^2}{2m\mathscr{E}_\mathrm{m}},$$

en utilisant σ le moment cinétique, conservé pour un mouvement à force centrale. La relation entre les racines d'un trinôme assure que :

$$r_p + r_a = -\frac{\mathscr{G}m_T m_{sc}}{\mathscr{E}_\mathrm{m}} \to \mathscr{E}_\mathrm{m} = -\frac{\mathscr{G}m_T m_{sc}}{r_p + r_a}.$$

2.

(**a**) La Terre sera un foyer de l'ellipse et celle-ci doit être tangente aux deux orbites circulaires. On obtient $2a = (R_T+z_c) + (R_T+z_s)$. On obtient l'allure suivante pour les trajectoires, pas du tout à l'échelle puisque les variations relatives de diamètre/grand-axe sont en fait très faibles.



(**b**) L'expression (**1c**) de l'énergie mécanique permet de calculer la vitesse au point P d'injection :

$$\frac{1}{2}mv_P^2 = \frac{-\mathscr{G}m_T m}{2R_T + z_c + z_s} + \frac{\mathscr{G}m_T m}{R_T + z_c}$$
$$v_P = v_c\sqrt{\frac{R_T+z_s}{R_T + \frac{z_c+z_s}{2}}},$$

en utilisant la vitesse $v_c = \sqrt{\frac{\mathscr{G}m_T}{R_T+z_c}}$ la vitesse du chasseur sur son orbite circulaire.

Notons v_p la vitesse au périgée de l'orbite de transfert. Puisque l'énergie mécanique sur l'ellipse de transfert est supérieure à celle sur l'orbite basse mais que les énergies potentielles sont les mêmes au même point P, on a $v_p > v_c$ et donc :

$$\Delta v_p \equiv v_p - v_c = v_c\left(\sqrt{\frac{R_T+z_s}{R_T+(z_c+z_s)/2}} - 1\right) = 57{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

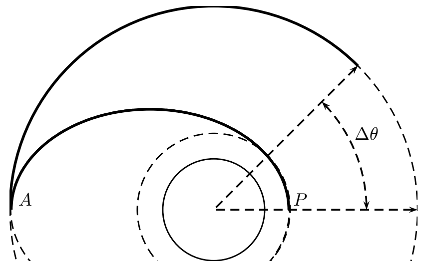
L'énergie sur l'orbite haute étant supérieure à celle sur l'orbite de transfert, on doit de nouveau augmenter la vitesse du chasseur à l'apogée pour le placer sur l'orbite circulaire haute. On adapte le calcul énergétique précédent. On obtient, en utilisant la vitesse $v_s = \sqrt{\frac{\mathscr{G}m_T}{R_T+z_s}}$ la vitesse sur l'orbite circulaire de la station :

$$\Delta v_a \equiv v_s - v_a = v_s\left(1 - \sqrt{\frac{R_T+z_c}{R_T+(z_c+z_s)/2}}\right) = 56{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

très proche car les orbites ont toutes des énergies proches car les différences relatives de grand-axe ou diamètre sont faibles.

(**c**) Le transfert dure une demi-période de l'ellipse soit, en utilisant la 3$^\text{e}$loi de Képler : $T_t = \frac{T_s}{2}\left(\frac{R_T+(z_c+z_s)/2}{R_T+z_s}\right)^{3/2}$.

(**d**) Pendant la durée T_t, le chasseur a parcouru une demi-ellipse (π) alors que la station a parcouru seulement $\pi - \Delta\theta$ à la vitesse angulaire $2\pi/T_s$. On a donc : $\pi - \Delta\theta = \frac{2\pi T_t}{T_s}$, soit $\Delta\theta = \pi\left(1 - \left(\frac{(R_T+(Z_s+z_c)/2)}{R_T+z_s}\right)^{3/2}\right)$. On calcule : $\Delta\theta = 3{,}95°$.



3. (**a**) Si la variation d'altitude sur une révolution est négligeable devant la distance en début de révolution, on peut considérer que la trajectoire a été pratiquement circulaire[iii]. En utilisant les résultats des orbites circulaires : $v = \sqrt{\mathscr{G}m_T/(R_T+z)}$, soit $\mathscr{E}_\mathrm{cin} = \frac{\mathscr{G}m_T m}{2(R_T+z)} = -\frac{1}{2}\mathscr{E}_\mathrm{pot}$, et donc $\mathscr{E}_\mathrm{m} = -\frac{\mathscr{G}m_T m}{2(R_T+z)}$

(**b**) D'après le théorème de l'énergie mécanique, on peut écrire $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}(\mathbf{f}) = -\gamma v^3$, soit :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}\frac{\mathscr{G}m_T m}{R_T+z}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathscr{G}m_T m}{2(R_T+z)^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\gamma\left(\frac{\mathscr{G}m_T}{R_T+z}\right)^{3/2} \to \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\gamma}{m}\sqrt{\mathscr{G}m_T(R_T+z)},$$

puisqu'on suppose $|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}| \ll v$ et donc $v \simeq \sqrt{\frac{\mathscr{G}m_T}{R_T+z}}$.

(**c**) À l'issue d'une révolution, de durée $T = 2\pi(R_T+z)/v$, la variation d'altitude Δz sera donc :

$$\Delta z \simeq -\frac{2\gamma}{m}T\sqrt{\mathscr{G}m_T(R_T+z)} = -\frac{4\gamma\pi}{m}(R_T+z)^2,$$

en considérant que le rayon R_T+z n'a pratiquement pas varié sur une période. Pour $z_s = 4{,}0\cdot 10^5\,\mathrm{m}$, on calcule $\Delta z = -41\,\mathrm{m}$. Cette chute est bien négligeable devant le rayon de la trajectoire $R_T + z_s = 6{,}8\cdot 10^6\,\mathrm{m}$, légitimant les approximations précédentes.

[iii] On quantifiera cette condition aux questions suivantes.

(**d**) On sépare les variables pour établir :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{R_T+z}} = -\frac{2\gamma\sqrt{\mathcal{G}m_T}}{m}\,\mathrm{d}t \to \int_{z=z_s}^{z_s-h}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{R_T+z}} = -\frac{2\gamma\sqrt{\mathcal{G}m_T}T(h)}{m}$$

$$\sqrt{R_T+z_s}-\sqrt{R_T+z_s-h} = \frac{\gamma\sqrt{\mathcal{G}m_T}T(h)}{m}$$

$$\to T(h) = \frac{m}{\gamma}\sqrt{\frac{R_T}{\mathcal{G}m_T}}\left(\sqrt{1+z_s/R_T}-\sqrt{1+(z_s-h)/R_T}\right) = 1{,}4\cdot 10^7\,\mathrm{s} = 155\,\mathrm{d},$$

très grande devant les 1,54 h d'une révolution.

(**e**) À ce rythme, la chute de l'ensemble durerait trop longtemps pour être contrôlable. On la provoquera en freinant brusquement l'ensemble (le chasseur produit pour cela une poussée en sens inverse du mouvement) pour les placer sur des orbites plus basses, où les frottements sont plus importants.